Λύση Άσκησης για το σπίτι

1) Φάση 4

x_4	u_4: 1	2	3	4	5	6	7	$f^*(x_4)$	u_4^*
1	10	-	-	-	-	-	-	10	1
2	10	20	-	-	-	-	-	20	2
3	10	20	30	-	-	-	-	30	3
4	10	20	30	40	-	-	-	40	4
5	10	20	30	40	50	-	-	50	5
6	10	20	30	40	50	60	-	60	6
7	10	20	30	40	50	60	70	70	7

Φάση 3

x_3	1	2	3	4	5	6	7	$f_3^*(x_3)$	u_3^*
2	40+10	-	-	-	-	-	-	50	1
3	40+20	60+10	-	-	-	-	-	70	2
4	40+30	60+20	80+10	-	-	-	-	90	3
5	40+40	60+30	80+20	100+10	-	-	-	110	4
6	40+50	60+40	80+30	100+20	100+10	-	-	120	4
7	40+60	60+50	80+40	100+30	100+20	100+10	-	130	4
8	40+70	60+60	80+50	100+40	100+30	100+20	100+10	140	4

Φάση 2

x_2	1	2	3	4	5	6	7	$f_3^*(x_2)$	x_2^*
3	20+50	-	-	-	-	-	-	70	1
4	20+70	70+50	-	-	-	-	-	120	2
5	20+90	70+70	90+50	-	-	-	-	140	3
6	20+110	70+90	90+70	100+50	-	-	-	160	3
7	20+120	70+110	90+90	100+70	100+50	-	-	180	3
8	20+130	70+120	90+110	100+90	100+70	100+50	-	200	3
9	20+140	70+130	90+120	100+110	100+90	100+70	100+50	210	3 ή 4

Φάση 1

x_1	1	2	3	4	5	6	7	$f_1^*(x_0)$	x_1^*
10	25+210	50+200	60+180	80+60	100+140	100+120	100+70	250	2

Υπολογισμός Μεγέθους εργατικού δυναμικού

n εβδομάδες

b_i

κόστος διατήρησης εργατικού δυναμικού x_i, μεγαλύτερο από b_i : $c_1(x_i - b_i)$

Αν $x_i > x_{i-1}$: κόστος πρόσληψης $c_2(x_i - x_{i-1})$

1) Φάση i αντιστοιχεί στην εβδομάδα i , $i=1,2,\dots,n$

2) Εναλλακτικές αποφάσεις στη φάση i είναι το πλήθος των εργαζομένων της εβδομάδας i (x_i)

3) η κατάσταση στη φάση i είναι x_i

$$f_{n+1}(x_n)=0$$

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{ c_1(x_i-b_i) + c_2(x_i-x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i) \}$$

Παράδειγμα

5, 7, 8, 4, 6 $(b_1=5,\ b_2=7,\ b_3=8,\ b_4=4,\ b_5=6)$

$c_1(x_i-b_i) = 3(x_i-b_i) \quad x_i > b_i$

$c_2(x_i-x_{i-1}) = 4 + 2(x_i-x_{i-1})$

Φάση 5 $\quad c_1(x_5-6) + c_2(x_5-x_4)$

x_4	$x_5=6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	$3\cdot0+4+2\cdot2=8$	8	6
5	$3\cdot0+4+2\cdot1=6$	6	6
6	$3\cdot0+0+0=0$	0	6

Φάση 4

$c_1(x_4-4)+c_2(x_4-x_3)+f_5(x_4)$

x_3	$x_4=4$	$x_4=5$	$x_4=6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	$3\cdot0+0+8=8$	$3+0+6=9$	$3\cdot2+0+0=6$	6	6

Φάση 3

$c_1(x_3-8)+c_2(x_3-x_2)+f_4(x_3)$

x_2	$x_3=8$	$f_3(x_2)$	x_3^*
7	$3\cdot0+4+2\cdot(1)+6=12$	12	8
8	$3\cdot0+0+6=6$	6	8

Φάση 2

$c_1(x_2-7)+c_2(x_2-x_1)+f_3(x_2)$

x_1	$x_2=7$	$x_2=8$	$f_2^*(x_1)$	x_2^*
5	$3\cdot0+4+2\cdot2+12=20$	$3\cdot1+4+2\cdot3+6=19$	19	8
6	$3\cdot0+4+2\cdot1+12=18$	$3\cdot1+4+2\cdot2+6=17$	17	8
7	$3\cdot0+0+12=12$	$3\cdot1+4+2\cdot1+6=15$	12	7
8	$3\cdot0+0+12=12$	$3\cdot1+0+6=9$	9	8

Φάση 1

	$x_1=5$	$x_1=6$	$x_1=7$	$x_1=8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
$x_0=0$	$3\cdot 0+4+2\cdot 5+19 = 33$	$3\cdot 1+4+2\cdot 6+12=36$	$3\cdot 2+4+2\cdot 7+12=30$	$3\cdot 2+4+2\cdot 8+9=35$	33	5

αποφάσεις $\to x_i$ (οριζόντια)

καταστάσεις $\to x_{i-1}$ (κάθετα)

Σε κάθε φάση οι καταστάσεις γίνονται αποφάσεις

Αντικατάσταση εξοπλισμού

Ζητούμενο είναι εξοπλισμός για T χρονικές περιόδους.

$K(t)$: κόστος χρήσης εξοπλισμού για ένα χρόνο όταν αυτό είναι ηλικίας t στην αρχή του χρόνου

$a(t)$: η τιμή ανταλλαγής που λαμβάνουμε όταν ανταλλάσσουμε τον εξοπλισμό ηλικίας t στην αρχή του χρόνου με ένα καινούργιο

$\pi(t)$: τιμή πώλησης του εξοπλισμού από τέλος του χρόνου T όταν αυτό είναι ηλικίας t.

A: τιμή αγοράς νέου εξοπλισμού

$f_u(t)$: ελάχιστο κόστος χρήσης του εξοπλισμού από την χρονική στιγμή u μέχρι την χρονική στιγμή t δεδομένου ότι την χρονική στιγμή u είναι ηλικίας t

1) Η φάση i αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή i

2) Εναλλακτικές αποφάσεις κρατώ - αντικαθιστώ

3) Η κατάσταση για την φάση i είναι η ηλικία του εξοπλισμού την χρονική στιγμή i

$A - a(t) + k(0) + f_{u+1}(1)$ → αντικαθιστώ εξοπλισμό

$k(t) + f_{u+1}(t+1)$ → κρατάω εξοπλισμό

Άρα $f_u(t) = \min\{A - a(t) + k(0) + f_{u+1}(1),\ k(t) + f_{u+1}(t+1)\}$

με $f_T(t) = -\pi(t)$ (οριακή συνθήκη)

<u>Παράδειγμα</u>

Εξοπλισμός ηλικίας 2, φτάνει μέχρι ηλικία 6

t	$k(t)$	$a(t)$	$\pi(t)$	A
0	5			70
1	10	55	45	
2	15	40	40	
3	20	30	30	
4	25	20	15	
5	35	10	10	
6	5	2	2	

$f_T(t) = -\pi(t)$

$f_4(1) = -45$ $\quad$ $f_4(2) = -40$ $\quad$ $f_4(3) = -30$

$f_4(4) = -15$ $\quad$ $f_4(5) = -10$ $\quad$ $f_4(6) = -2$

Φάση 3 (εικασίες στα 2 χρόνια και ελέγχω μετά από 3 χρόνια)

$f_3(1) = \min\{A - a(1) + k(0) + f_4(1),\ k(1) + f_4(2)\} = \min\{-25, -30\} = -30$

$f_3(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_4(1),\ k(2) + f_4(3)\} = \min\{-10, -15\} = -15$

$f_3(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_4(1),\ k(3) + f_4(4)\} = \min\{0, 5\} = 0$

$f_3(4) = \min\{A - a(4) + k(0) + f_4(1),\ k(4) + f_4(5)\} = \min\{10, 15\} = 10$

$f_3(5) = \min\{A - a(5) + k(0) + f_4(1),\ k(5) + f_4(6)\} = \min\{20, 30\} = 20$

Φάση 2

$f_2(1) = \min\{A - a(1) + k(0) + f_3(1),\ k(1) + f_3(2)\} = \min\{-110, -5\} = -110$

$f_2(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_3(1),\ k(2) + f_3(3)\} = \min\{5, 15\} = 5$

$f_2(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_3(1),\ k(3) + f_3(4)\} = \min\{15, 30\} = 15$

$f_2(4) = \min\{A - a(4) + k(0) + f_3(1),\ k(4) + f_3(5)\} = \min\{25, 45\} = 25$

Φάση 1

$f_1(1) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_2(1),\ k(1) + f_2(2)\} = \min\{10, 15\} = 10$

$f_1(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_2(1),\ k(2) + f_2(3)\} = \min\{25, 30\} = 25$

$f_1(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_2(1),\ k(3) + f_2(4)\} = \min\{35, 45\} = 35$

$f_0(2) = \min\{\underline{A - a(2) + k(0) + f_1(1)}, k(2) + f_1(3)\} = \min\{\underline{45}, 50\} = \underline{45}$

Μπορώ να το γράψω και αλλιώς:

π.χ. <u>Φάση 3</u>

t	Αντικατάσταση	Διατήρηση	$f_3(t)$
1	$A - a(1) + k(0) + f_4(1) = 25$	$k(1) + f_4(2) = -30$	-30
2	$A - a(2) + k(0) + f_4(1) = 10$	$k(2) + f_4(3) = -15$	-15
3	$A - a(3) + k(0) + f_4(1) = 0$	$k(3) + f_4(4) = 5$	0
4	$A - a(4) + k(0) + f_4(1) = 10$	$k(4) + f_4(5) = 15$	10
5	$A - a(5) + k(0) + f_4(1) = 20$	$k(5) + f_4(6) = 30$	20

Έστω τώρα ότι εκτός από τις επιλογές κρατώ/αντικαθιστώ είχα και την επιλογή να νοικιάσω.

$f_n(t)$: το ελάχιστο κόστος του εξοπλισμού από την χρονική στιγμή n μέχρι το T δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή n ο εξοπλισμός είναι ηλικίας t.

$F(n)$: το ελάχιστο κόστος χρήσης του εξοπλισμού από την χρονική στιγμή n μέχρι την T δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή n δεν υπάρχει ιδιόκτητος εξοπλισμός αφού έχουμε ενοικιασμένο.

Άρα $f_u(t)=\min\{A-a(t)+k(0)+f_{u+1}(1),\ k(t)+f_{u+1}(t+1),\ -n(t)+E+k(0)+F(u+1)\}$

όπου E το κόστος χρήσης του ενοικιασμένου.

$F(u)=\min\{A+k(0)+f_{u+1}(1),\ E+k(0)+F(u+1)\}$

$F_T(t)=-n(t) \qquad F(T)=0$

Άσκηση για το σπίτι

Έχω ένα εργαστήριο που θέλει να αντικαταστήσει έναν μαγνητικό τομογράφο. Μετά την λειτουργία του για 4 χρόνια θα αποφασίσει τι θα κάνει παρακάτω. Έχει και την δυνατότητα να τον νοικιάσει

$A(u)=50+5u \qquad u=0,1,2,3$ (αγορά)

$E(u)=10+3u \qquad u=0,1,2,3$ (ενοικίαση)

$k(t)=5+5t \qquad t=0,1,2,3$ (κόστος χρήσης τομ. ηλικίας t)

$n(t)=45-6t \qquad t=1,2,3$ (τιμή πώλησης τομ ηλικίας t)

$a(t)=55-5t \qquad t=1,2,3$ (τιμή ανταλλαγής τομ ηλικίας t)

$k(0)$ κόστος χρήσης νοικιασμένου τομ.

$f_4(1)=f_4(2)=f_4(3)=f_4(4)=0 \qquad f(4)=0$

Σκοπός μου είναι να βρω τις αποφάσεις που θα πάρω στην αρχή κάθε χρόνου.